Cálculo 3A – EP10 – Teorema de Green. Teorema das quatro equivalências.

Exercício 1: Calcule a integral de linha diretamente e, também, pelo teorema de Green:

$$\oint_C x\,dx + y^2\,dy$$

onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $y = x$, no sentido anti-horário.

Exercício 2: Utilize o teorema de Green para calcular:

a) $I = \oint_C -\frac{x^2 y}{1+x^2}\,dx + \operatorname{arctg} x\,dy$ onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ e $x = 0$, no sentido anti-horário;

b) $I = \oint_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + (x + e^x \cos y)\,dy$, onde C é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$, no sentido anti--horário;

c) $I = \oint_C 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx + \left(\ln(x^2+y^2) + x\right)dy$ onde C é parametrizada por $x = 4 + 2\cos t$ e $y = 4 + \operatorname{sen} t$, com $0 \le t \le 2\pi$.

Exercício 3: O teorema de Green pode ser utilizado para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

a) onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário?

b) onde C é o triângulo com vértices $(1,0)$, $(1,2)$ e $(2,2)$, orientado no sentido anti-horário?

c) Qual é o valor da integral de linha onde C é o triângulo da parte (b)?

Exercício 4: Use uma integral de linha para calcular a área da região plana limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Exercício 5: Uma partícula move-se ao longo da circunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ do ponto $(2,0)$ até $(-2,0)$. Determine o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força:

$$\vec{F}(x,y) = \left(x + e^{y^2}, x^3 + 3xy^2 + 2xye^{y^2}\right).$$

Exercício 6: Mostre que a seguinte integral é independente do caminho e calcule-a:

$$I = \int_{(0,1)}^{(2,3)} \left(2x + y^3\right)dx + \left(3xy^2 + 4\right)dy.$$

Exercício 7:

a) Mostre que $I = \int_C \left(x + 3y + y^{10}\right)dx + \left(3x + 10xy^9 + \ln(1+y^2)\right)dy$ é independente do caminho.

b) Calcule a integral I para $C : (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, com $y \ge 0$, no sentido horário.

Exercício 8: Mostre que

$$I = \int_C (1 + 2xy + \ln x)\, dx + x^2\, dy$$

é independente do caminho e calcule o valor de I onde C é dada por $\gamma(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Respostas

Exercício 1: 0.

Exercício 2: (a) 1; (b) $2\sqrt{6}\pi$; (c) 2π.

Exercício 3: (a) Não; (b) Sim; (c) 0.

Exercício 4: $1/3$ *u.a.*

Exercício 5: $12\pi - 4$ *u.w.*

Exercício 6: $\varphi(x, y) = x^2 + xy^3 + 4y$ é uma função potencial para o campo. A integral é igual a 66.

Exercício 7: (b) 2.

Exercício 8: 2.